

# Schnellübung 1

**Anweisung:** Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwort an. Es gibt genau eine richtige Antwort. Beantworten Sie mindestens 2 der 3 Aufgaben korrekt, erhalten Sie einen Punkt.

1. Welche der folgenden Körpererweiterungen ist **kein** Zerfällungskörper eines Polynoms im Grundkörper?
  - (a)  $\mathbb{C}|\mathbb{R}$ ,
  - (b)  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})|\mathbb{Q}$ ,
  - (c)  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})|\mathbb{Q}$ ,
  - (d)  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, e^{2\pi i/3})|\mathbb{Q}$ .
2. Sei  $p$  eine Primzahl,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ . Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen **falsch**?
  - (a)  $\text{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}|\mathbb{F}_p) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ,
  - (b)  $[\mathbb{F}_{p^n} : \mathbb{F}_p] = n$ ,
  - (c) Für jedes  $m \leq n$  ist  $\mathbb{F}_{p^n}$  eine Körpererweiterung von  $\mathbb{F}_{p^m}$ , also  $\mathbb{F}_{p^m} \subseteq \mathbb{F}_{p^n}$ ,
  - (d) Der Frobeniushomomorphismus  $\mathbb{F}_{p^n} \rightarrow \mathbb{F}_{p^n}, x \mapsto x^p$  hat Ordnung  $n$ .
3. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?
  - (a)  $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})|\mathbb{Q}) \subseteq S_3$ ,
  - (b) Für eine endliche Körpererweiterung  $L|K$  gilt  $|\text{Gal}(L|K)| = [L : K]$ ,
  - (c) Sei  $p$  eine Primzahl und  $f \in \mathbb{Q}[X]$  ein irreduzibles Polynom vom Grad  $p$  mit Zerfällungskörper  $E$ , dann ist  $\text{Gal}(E|\mathbb{Q}) \cong S_p$ ,
  - (d) Sei  $E|K$  der Zerfällungskörper eines separablen Polynoms  $f \in K[X]$ . Dann gilt  $|\text{Gal}(E|K)| = [E : K]$ .